FUNDAMENTOS AXIOMATICOS PARA LA MECANICA DE PARTICULAS CLASICA

J.C.C. McKinsey, A.C. Sugar y Patrick Suppes

Lecturas Filosóficas 1

Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo
Escuela de Filosofía

UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Rector:
DR. J. GENOVEVO FIGUEROA ZAMUDIO

Secretario General:
LIC. FERNANDO JUAREZ ARANDA

Director de la Escuela de Filosofía:
PROFR. ROBERTO BRICEÑO FIGUERAS

130575

FUNDAMENTOS AXIOMATICOS PARA LA MECANICA DE PARTICULAS CLASICA

Lecturas Filosóficas
Publicación Mensual
Escuela de Filosofía
Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo

Consejo Editorial:
Mauricio Malamud
Fernanda Navarro
José Luis Rolleri

Precio del ejemplar: $ 15.00
Suscripción anual: $150.00
Apartado Postal 45-A
Morelia, Mich.

Lecturas Filosóficas 1 Marzo 1978

J.C.C. McKinsey, A.C. Sugar y Patrick Suppes

FUNDAMENTOS AXIOMATICOS PARA LA MECANICA DE PARTICULAS CLASICA

Traducción de
Adolfo G. de la Sienra

Título original:

Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics.

© 1978. Todos los derechos reservados
Impreso y hecho en México.

Con este número iniciamos la serie mensual **Lecturas Filosóficas**, *y a su vez, la serie inicia las publicaciones de la Escuela de Filosofía.*

Lecturas Filosóficas *contendrá artículos muy diversos entre sí, aunque todos ellos de interés filosófico. Nuestro criterio de publicación es amplio; incluiremos trabajos que apoyen la enseñanza en la escuela, investigaciones de los miembros de la misma así como colaboraciones de miembros de otras Universidades que resulten de actualidad.*

De esta manera, **Lecturas Filosóficas** *cumplirá una doble función: auxiliar de la enseñanza y órgano de difusión de los resultados de la investigación.*

Consejo Editorial.

FUNDAMENTOS AXIOMATICOS PARA LA MECANICA DE PARTICULAS CLASICA*

J.C.C. Mckinsey, A.C. Sugar y Patrick Suppes.

1. INTRODUCCION.[1]

Con la publicación de los *Principia* de Newton en 1687 la mecánica de partículas clásica recibió su primera formulación sistemática. En los aproximadamente tres siglos que han transcurrido desde esa fecha los fundamentos de esta disciplina han sido reexaminados y replanteados un gran número de veces.[2] No obstante, desde el punto de vista del rigor lógico y la precisión ninguno de los tratados de mecánica clásica existentes parece estar enteramente libre de serios defectos: ninguno de ellos se acerca siquiera a satisfacer los patrones establecidos, digamos, por Hilbert en su axiomatización de la Geometría euclideana.[3]

Una deficiencia sobresaliente de la literatura ha sido la falla consistente en no aclarar qué nociones de la mecánica de partículas

* *Journal of Rational Mechanics and Analysis,* Vol. 2, No. 2, abril, 1953. (traducción autorizada).

1 Estamos agradecidos con el profesor Herman Rubin, con el profesor Alfred Tarski y con el señor Robert Vaught por sugerencias útiles en relación con este artículo.

2 Entre los trabajos de los siglos dieciocho y diecinueve, los de Lagrange, Hertz y Mach son sobresalientes. Para trabajos más recientes ver Marcolongo [1], Hamel [1], [2] y [3], y Simon [1]; (los números entre paréntesis rectangulares se refieren a entradas en la Bibliografía). Las referencias mencionadas son, sin embargo, sólo una pequeña parte de la enorme literatura en física, matemáticas y filosofía concerniente a los fundamentos de la mecánica; de hecho, casi todo libro de texto sobre la materia intenta algo en esta dirección.

3 Así, aunque la formulación de Hamel de la mecánica es correctamente considerada como uno de los más claros tratados existentes sobre la materia, encontramos en Hamel [2] (p. 3), el siguiente extraño axioma: "Die Kräfte *dk* sind durch ihre 'Ursachen' bestimmt, d. h. durch Variable, welche den geometrischen und physikalischen Zustand der umgebenden Materie darstellen. Diese Abhängigkeit ist eindeutig und im allgemeinen stetig und differenzierbar". ["Las fuerzas *dk* están determinadas por sus 'causas', esto es, por variables que representan el estado geométrico y físico de la materia dada. Esta dependencia es inequívoca y en general constante y diferenciable" N. del T.]. Uno no ve cómo podría intervenir este axioma en la demostración de teoremas o en la solución de problemas.

se toman como primitivas. La práctica usual ha sido omitir toda mención explícita de algunas de las nociones primitivas efectivamente utilizadas, pero una práctica tal conduce casi inevitablemente a un conjunto insuficiente de axiomas.[4] Uno de nuestros objetivos en este artículo es proporcionar un conjunto de axiomas, basadò en una lista explícitamente establecida de nociones primitivas, que creemos son adecuados para la mecánica de partículas clásica.

Debe señalarse que la mecánica de partículas, como casi cualquier otra ciencia en forma deductiva, conlleva una idealización del conocimiento empírico real —de manera que es mejor concebirla como una herramienta para tratar con el mundo que como una imagen representándolo. Asumiremos, por ejemplo, que los intervalos de tiempo pueden ser arbitrariamente pequeños (suposición para la cual no hay evidencia empírica); y no impondremos un límite inferior positivo a la masa de las partículas (aunque parece haber buenas razones empíricas para suponer que tal límite existe). Incorporamos estas idealizaciones a nuestro sistema sobre la base pragmática de que simplifican las matemáticas. Sentimos, sin embargo, que en ciencia es muy importante ser concientes de precisamente qué suposiciones de este tipo está uno haciendo, dado que podría decidir después modificarlas: de aquí la deseabilidad de la aproximación axiomática.

Más aún, cualquier axiomatización de la mecánica de partículas debe tener todavía un carácter arbitrario adicional, debido al hecho de que los físicos no están muy de acuerdo entre sí con respecto a lo que se ha de significar por una partícula. No es suficiente decir que el concepto de partícula está implícitamente definido por los axiomas de la mecánica de partículas: el problema es decidir cuál es la noción intuitiva, informal de partícula que habrá de guiarnos al establecer tales axiomas. Por ejemplo, ¿deben los cuerpos pequeños servir como nuestro modelo preliminar de partículas? ¿o debemos utilizar centros de masa de cuerpos como nuestro modelo? Esta no es una distinción pedante, ya que aquí hay una diferencia esencial cuando surge la cuestión de un axioma de impenetrabilidad; el primer modelo sugiere un axioma tal, mientras que el segundo no. Al decidir tales cuestiones hemos estado influenciados frecuentemente por consideraciones de conveniencia y elegancia; de esta

4 Una axiomatización de la mecánica (pero de la relativística, más que de la clásica) que elimina este defecto se encuentra en Hermes [1]. Pero el desarrollo de Hermes parece ser defectuoso en otras direcciones (ver Rosser [1]).

manera, en el caso anterior de las dos interpretaciones posibles de partícula, por ejemplo, tal parece que un axioma de impenetrabilidad no hace sino complicar las demostraciones, y acordemente hemos omitido cualquier axioma de este tipo.

Creemos, sin embargo, que la caracterización de la mecánica de partículas clásica presentada aquí, mientras que en cierto modo es arbitraria, no se desvía seriamente en ningún aspecto esencial de las concepciones usuales. Nuestro único propósito ha sido presentar una vieja materia de un modo matemáticamente riguroso, no crear una nueva e indeseada rama de la mecánica. La evidencia parcial para la adecuación de nuestros axiomas está dada por los Teoremas 2 y 8. Se podría proporcionar una evidencia más fuerte si uno pudiera mostrar que un sistema satisface nuestros axiomas para la mecánica de partículas si y sólo si es isomórfico al sistema constituido por los centros de masa en algún conjunto de cuerpos rígidos; pero para hacer esto de modo exacto uno tendría que dar primero, por supuesto, una fundamentación axiomática de la mecánica de cuerpos rígidos.

Al lado de nuestras nociones primitivas y axiomas, debemos valernos de varias nociones y resultados de la matemática clásica. De modo que nuestro sistema no está completamente formalizado. Pero estará claro cómo podría ser completado el proceso de formalización: sería necesario únicamente agregar a nuestras primitivas las nociones lógicas y matemáticas adecuadas (número real, adición y multiplicación de números reales, conectivas enunciativas, cuantificadores, etc.) y suplementar nuestros axiomas mediante la adición de axiomas y reglas matemáticos y lógicos apropiados.

Tal vez sería útil agregar una palabra acerca de las notaciones matemáticas que habremos de utilizar, aunque la mayoría de ellas son usuales. Denotamos al conjunto cuyos únicos miembros son $a_1, a_2, \ldots, a_n$ por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y al n-tuplo ordenado cuyo primer miembro es a_1, cuyo segundo miembro es a_2, y así consecutivamente por $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Si A y B son conjuntos, entonces denotamos con $A \times B$ el *producto cartesiano* de A y B: es decir, el conjunto de todos los pares ordenados $\langle a, b \rangle$, donde $a \in A$ y $b \in B$.

Utilizamos la palabra "intervalo" para significar intervalo unidimensional, el que puede ser abierto, cerrado o semicerrado y finito, infinito o semi-infinito: esto es, cualquier subconjunto conectado de números reales que contenga al menos dos elementos.

Utilizamos la notación acostumbrada para las derivadas. Cuando se dice que una función tiene una derivada a lo largo de un intervalo cerrado $[a, b]$, queremos decir que la derivada existe en todos los puntos interiores del intervalo, que la derivada a mano derecha existe en a y que la derivada a mano izquierda existe en b.

Por un vector (n-dimensional) significamos un n-tuplo ordenado $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$ de números reales. Si $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ es un vector y b un número real entonces escribimos

$$b\langle a_1, ..., a_n\rangle = \langle a_1, ..., a_n\rangle b = \langle a_1 b, ..., a_n b\rangle .$$

Si $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ y $\langle b_1, ..., b_n\rangle$ son dos vectores entonces escribimos

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle + \langle b_1, ..., b_n\rangle = \langle a_1+b_1, ..., a_n+b_n\rangle$$

y

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle - \langle b_1, ..., b_n\rangle = \langle a_1-b_1, ..., a_n-b_n\rangle .$$

Si $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ es un vector, escribimos $-\langle a_1, ..., a_n\rangle = \langle -a_1, ..., -a_n\rangle$. Habremos de denotar al vector n-dimensional, la totalidad de cuyos componentes son 0, por $\bar{0}_n$. Llamamos a dos vectores α y β, ninguno de los cuales es $\bar{0}_n$, *paralelos* si existe un número real k tal que $\alpha = k\cdot\beta$.

Si $\alpha = \langle a_1, ..., a_n\rangle$ es cualquier vector, escribimos

$$|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} .$$

Si, para toda t en un intervalo T las funciones (con valores numéricos) $f_1(t)$, ..., $f_n(t)$ poseen derivadas con respecto a t, entonces escribimos

$$\frac{d}{dt}\langle f_1(t), ..., f_n(t)\rangle = \langle \frac{d}{dt} f_1(t), ..., \frac{d}{dt} f_n(t)\rangle .$$

Definimos las derivadas de orden superior de funciones vectoriales de un modo análogo.

Si cada una de las n series infinitas

$$\begin{array}{ll} & x_{11} + x_{12} + \ldots \\ & x_{21} + x_{22} + \ldots \\ (1) & \quad \vdots \\ & x_{n1} + x_{n2} + \ldots \end{array}$$

es convergente, y si las series convergen respectivamente a $x_1, x_2, ..., x_n$ entonces decimos que la serie de vectores

(2) $\langle x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}\rangle + \langle x_{12}, x_{22}, x_{n2}\rangle + \ldots$

es convergente, y escribimos

$$\langle x_1, ..., x_n\rangle = \langle x_{11}, ..., x_{n1}\rangle + \langle x_{12}, ..., x_{n2}\rangle + \ldots$$

Si cada una de las series (1) es absolutamente convergente, llamamos también a (2) absolutamente convergente.

2. NOCIONES PRIMITIVAS.

Nuestro sistema de mecánica de partículas está basado en cinco nociones primitivas: P, T, m, s y f. P y T son conjuntos, m es una función unaria, s es una función binaria y f es una función ternaria.

La interpretación física propuesta para P es el conjunto de las partículas. Sin embargo, debe tenerse en mente que, debido al carácter abstracto de nuestros axiomas, no estamos restringidos a modelos físicos; de modo que en algunos casos puede ser útil interpretar a P, digamos, como un conjunto de números, o un conjunto de conjuntos, o un conjunto de funciones sobre algún dominio.

T será interpretada físicamente como un conjunto de números reales que miden tiempos pasados (en términos de alguna unidad de tiempo y medidos a partir de cierto origen temporal). De esta manera dejamos de lado todos los problemas conectados con la medición del tiempo (así como con la de la masa, la de la distancia y la de la fuerza); esto no es porque creamos que todos estos problemas han sido resueltos —o que no son importantes— sino meramente porque consideramos que es posible separar a la mecánica propiamente dicha de tales cuestiones epistemológicas y experimentales.[5]

Si p es un miembro de P (es decir, en la interpretación física, si p es una partícula), entonces $m(p)$ es interpretado físicamente como el valor numérico de la masa de p.

5 Podemos agregar que el intento de tratar con ambos tipos de problemas simultaneamente es, en nuestra opinión, responsable de mucha de la confusión y obscuridad características de las discusiones sobre los fundamentos de la física.

Sería posible generalizar nuestro sistema al considerar también a la masa como una función del tiempo. Un sistema generalizado tal podría encontrar aplicaciones útiles, por ejemplo, para la teoría de los cohetes (donde, conforme el combustible es consumido, la masa del cohete decrece). Pero hemos preferido mantenernos cerca de las exposiciones tradicionales —en las cuales la masa ha sido considerada como invariante en el tiempo.

Si p está en P y t en T entonces $s(p,t)$ es un vector n-dimensional. Para $n=3$ (o para $n<3$, si lo que nos concierne es la mecánica de partículas plana o la mecánica de partículas unidimensional) $s(p,t)$ será interpretado físicamente como un vector que da la posición de p en el instante t. Aunque las interpretaciones más obviamente útiles de nuestro sistema se obtienen con $n\leqslant 3$, hemos dejado n arbitrario porque ninguno de los teoremas que demostramos depende del valor de n.

Debe notarse que la primitiva s fija la elección de un sistema de coordenadas. También sería posible desarrollar la mecánica de partículas tomando como una primitiva el conjunto de todos los sistemas de coordenadas (inerciales) admisibles:[6] es decir, hablando a grandes rasgos, la clase de todos los sistemas de coordenadas con respecto a los cuales las partículas en cuestión satisfacen la Segunda ley de Newton.

El significado físico propuesto para nuestra última primitiva es ligeramente más complicado. Al tratar una situación empírica a la que deseamos aplicar la teoría de la mecánica de partículas, cada partícula está por lo regular sometida a un número de fuerzas diferentes. Es verdad que el movimiento de la partícula está determinado solamente por la resultante de estas fuerzas; pero en la mayoría de los casos el problema es formulado originalmente en términos de una variedad de fuerzas. Es así que para mantener una cantidad razonable de flexibilidad en nuestro sistema es deseable permitir la acción de un número de fuerzas sobre cada partícula; sin embargo, asumimos que a lo sumo una infinidad numerable de fuerzas actúa sobre una partícula dada. Por lo tanto, si p es una partícula y t es un elemento de T, podríamos denotar esas fuerzas por $F_1(p,t), F_2(p,t),\ldots$. Pero, para eliminar la molestia de tener una infinidad de funciones primitivas en el sistema, denotamos estas fuerzas por $f(p,t,1), f(p,t,2),\ldots$. Así, si p es cualquier miembro de P, si t es

6 Un procedimiento tal es utilizado por Hermes para la mecánica relativística; ver Hermes [1].

cualquier miembro de T y si i es cualquier miembro del conjunto Z^+ de los enteros positivos, entonces $f(p,t,i)$ es un vector que da las componentes (paralelas a los ejes del sistema de coordenadas) de la i-ésima fuerza actuante sobre la partícula p en el tiempo t. (Está claro que el orden de las fuerzas puede ser arbitrario: de modo que no tiene importancia que $f(p,t,1)$ sea la primera y $f(p,t,2)$ la segunda fuerza actuante sobre p en el tiempo t; sólo es importante que $f(p,t,1)$ y $f(p,t,2)$ puedan ser distintas).

Hacemos a lo largo del presente la asunción, usual en la matemática moderna, de que las funciones primitivas no están definidas sobre ningún conjunto mayor que los mencionados en los axiomas. Así, $m(p)$ está definida sólo cuando p está en P; de modo semejante, $s(p,t)$ está definida sólo cuando p está en P y t está en T; y $f(p,t,i)$ está definida sólo cuando p está en P, t está en T e i está en Z^+. De aquí que la función m, por ejemplo, sea un cierto conjunto de pares ordenados de la forma $\langle p,x\rangle$ donde p pertenece a P y x es un número real. Se sigue que las primitivas P y T son efectivamente definibles:[7] de este modo podríamos definir a P como el conjunto de los primeros elementos de las parejas que constituyen a m. No obstante, para eliminar cualquier apariencia de extrañeza en nuestro sistema de axiomas, hemos mantenido a P y a T como nociones primitivas. Si el sistema fuera a ser completamente formalizado (es decir, sumergido junto con las partes necesarias de las matemáticas en un sistema de lógica formal) entonces sería indudablemente mejor eliminar a las nociones P y T del todo; pero debiera ser obvio qué cambios involucraría esto en el sistema de axiomas.

3. AXIOMAS.

Utilizando las cinco nociones primitivas que fueron caracterizadas intuitivamente en la sección previa, damos ahora nuestros axiomas para la mecánica de partículas clásica. Se darán más abajo algunos comentarios sobre la justificación de los axiomas y algunas sugerencias para axiomatizaciones alternativas.

Un sistema $\Gamma = \langle P,T,m,s,f\rangle$ que satisfaga los axiomas *P1-P6* es llamado un *sistema n-dimensional de la mecánica de partículas* (o algunas veces, cuando no hay peligro de ambigüedad, simplemente un *sistema de la mecánica de partículas*).

7 Veremos en la Sección 5, por otro lado, que m, s y f son mutuamente independientes.

Axiomas cinemáticos

Axioma P1. P es un conjunto no vacío, finito.

Axioma P2. T es un intervalo de números reales.

Axioma P3. Si p está en P y t está en T entonces s(p,t) es un vector n-dimensional tal que $d^2/dt^2\ s(p,t)$ *existe.*

Axiomas dinámicos

Axioma P4. Si p está en P entonces m(p) es un número real positivo.

Axioma P5. Si p está en P y t está en T entonces f(p,t,1), f(p,t,2), ..., f(p,t,i),... son vectores n-dimensional tales que la serie $\Sigma_{i=1}^{\infty}\ f(p,t,i)$ *es absolutamente convergente.*

Axioma P6. Si p está en P y t está en T entonces

$$m(p)\,\frac{d^2}{dt^2}\ s(p,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i).$$

La condición, en el Axioma *P1*, de que *P* sea no vacío, podría ser omitida sin ninguna modificación seria del sistema; sin embargo, parece haber poca razón para considerar conjuntos vacíos de partículas, así que no hemos efectuado tal generalización.

La condición de que *P* sea finito es puesta para hacer que nuestro sistema esté de acuerdo con las formulaciones usuales de la mecánica de partículas. En este respecto debe notarse que, si queremos tener la posibilidad de interpretar las partículas como centros de masa de cuerpos rígidos, y si suponemos que los cuerpos rígidos siempre tienen un volumen distinto de cero y que no pueden penetrarse entre sí, entonces al menos está excluida la posibilidad de que haya una infinidad no numerable de partículas. Pero podría obtenerse una generalización esencial de nuestro sistema de axiomas si reemplazáramos a *P1* por el axioma "*P* no es vacío y es o bien finito o bien infinito numerable". Sin embargo, si el Axioma *P1* fuera a ser liberalizado de esta manera, entonces probablemente sería deseable agregar algunos axiomas adicionales, para asegurar que la masa total y la energía cinética del sistema sean finitas.

Regresando a la explicación en la Sección 1 del término "intervalo", vemos que el Axioma *P2* significa simplemente que *T* es un conjunto conectado de números reales (conteniendo al menos dos elementos). Podría pensarse que sería preferible suponer que *T* es siempre el conjunto de todos los números reales (en cuyo caso podrían ser omitidos la noción primitiva *T* así como el Axioma

P2). Sin embargo, esto tiene la desventaja de que en muchas aplicaciones sería no natural o inconveniente suponer que el movimiento de un sistema de partículas persiste a través de todo el tiempo. Así, si deseamos estudiar la trayectoria de una bala de cañón, parecería muy natural suponer que T comienza en el momento en que la bala deja la boca del cañón. O considérese el caso de dos partículas acercándose por virtud de su atracción gravitatoria mutua; aquí es conveniente suponer que T es un intervalo abierto y que el punto final a mano derecha de T es el instante de contacto de las dos partículas; dado que la aceleración de las partículas tiende a infinito conforme las partículas se aproximan al contacto, no podemos tomar a T de modo que incluya el momento de contacto sin introducir discontinuidades en las aceleraciones. (Para tratar cualquier intervalo de tiempo mayor necesitaríamos recurrir a una rama diferente de la mecánica —que podría ser llamada "mecánica del impacto").

La condición en nuestro Axioma *P3*, de que la función s sea doblemente diferenciable, es ligeramente más restrictiva que la impuesta por un axioma de Hamel quien requiere (ver Hamel [2], p. 2) que s sea doblemente diferenciable sólo parcialmente. Sin embargo, nuestro axioma más fuerte facilita la demostración de teoremas generales, y creemos que la mayoría de las aplicaciones pueden ser objeto de cuidados mediante el procedimiento de considerar varias interpretaciones sucesivas de los axiomas en vez de una sola. Así, supongamos que un objeto resbala sobre la superficie de una mesa horizontal plana con una velocidad constante y que cae por el borde. Aquí la segunda derivada del vector posición (es decir, la aceleración) no existe en el instante preciso en el que el objeto está en el borde de la mesa. Por otra parte, en ese instante existen tanto la derivada a mano izquierda como la derivada a mano derecha (la primera es cero y la segunda es la aceleración de la gravedad). Por consiguiente, podemos tratar esta situación considerando dos interpretaciones de nuestro sistema de axiomas con dos intervalos consecutivos de tiempo T_1 y T_2 : T_1 dura desde el comienzo del movimiento hasta que el objeto alcanza el borde de la mesa; y T_2 comienza cuando el objeto deja el borde de la mesa y termina hasta el fin del movimiento.

En el Axioma *P4* hemos tomado a la masa como siendo siempre positiva. La generalización aparentemente inocua consistente en permitir a la masa ser algunas veces cero tendría la siguiente consecuencia inconveniente: si $m(p) = 0$ entonces el Axioma *P6* no impondría ninguna condición a la aceleración de la partícula, y por ende su movimiento sería sumamente indeterminado. Simon (ver

Simon [1]) permite que la masa sea incluso negativa; pero esta generalización no parece ser muy útil por lo que concierne a las aplicaciones.

El Axioma *P5* impone la condición de que la suma de las fuerzas actuantes sobre una partícula sea absolutamente convergente. Esto se hace para que el movimiento de una partícula sea independiente del orden en que se nombren las fuerzas a ella aplicadas.

El Axioma *P6* contiene una formulación de la Segunda Ley de Newton. Este es el único de nuestros axiomas que es ordinariamente establecido de modo explícito. En particular, los axiomas cinemáticos prácticamente no son mencionados nunca. Sin embargo, en efecto *P6* no constituye por sí mismo una base suficiente para la mecánica de partículas clásica: si combinamos *P3* y *P6* en un solo axioma, los cinco axiomas resultantes son mutuamente independientes. Más aún, debiera ser claro a partir de la discusión anterior que no está por entero más alla de todo cuestionamiento qué otros axiomas al lado de *P6* debieran ser asumidos: establecer los otros axiomas explícitamente es empezar a considerar varias alternativas.

Cerramos esta sección con unas cuantas notas acerca de algunos axiomas que pudieron haber sido asumidos, pero que no lo fueron.

El primer lugar, como fue señalado en la Sección 1, no asumimos un Axioma de impenetrabilidad como el siguiente: "si p_1 y p_2 son miembros distintos de P y si t está en T, entonces $s(p_1,t) \neq s(p_2,t)$". Esto es debido a que tenemos en mente una interpretación de los elementos de P como centros de masa de cuerpos rígidos; pero podría fácilmente suceder (como sucede en ocasiones, por ejemplo, cuando una bala es disparada a través del hoyo de una rosquilla) que los centros de masa de cuerpos distintos coincidan en un cierto momento.

En segundo lugar, no hemos asumido la Primera ley de Newton; pero ésta es una consecuencia trivial de nuestros axiomas (ver Teorema 1).

Finalmente, no hemos tomado la Tercera ley como axioma. Hemos omitido esta ley porque sucede frecuentemente en las aplicaciones que uno quiere considerar un sistema de partículas donde *no* es cierto que para toda acción hay una reacción igual y en sentido contrario: por ejemplo, en la balística exterior nunca consideramos la perturbación de la órbita de la tierra ocasionada por el disparo de un cañón. Sin embargo, la ausencia de esta ley como axioma es

equilibrada por el hecho de que podemos demostrar el Teorema 8, lo que vale tanto como decir que todo modelo de nuestros axiomas puede ser sumergido en un modelo que también satisface la Tercera ley de Newton.

Estrechamente conectada con la Tercera ley está la cuestión de la distinción entre fuerzas internas y externas. Esta distinción podría haber sido inicialmente hecha reemplazando la primitiva f por dos nuevas primitivas: g, para representar fuerzas externas; y h, para representar fuerzas internas. Si p está en P, t está en T e i está en Z^+, entonces $g(p,t,i)$ habrá de ser interpretado físicamente como la i-ésima fuerza externa actuante sobre p en el tiempo t. Si p y q están en P, t está en T e i está en Z^+. entonces $h(p,q,t,i)$ es interpretado físicamente como la i-ésima fuerza interna que la partícula q ejerce sobre p en el tiempo t. Los axiomas revisados serían los siguientes: *P1*, *P2*, *P3* y *P4* como antes; dos axiomas sobre g y h, similares a *P5* sobre f; un séptimo axioma, similar a *P6* expresando la Segunda ley de Newton; un octavo axioma aseverando que, para p y q en P, para t en T y para i en Z^+, $h(p,q,t,i) = -h(q,p,t,i)$; y finalmente un noveno axioma aseverando que, para p y q en P para t en T y para i en Z^+, los tres vectores $s(p,t) - s(q,t)$, $h(p,q,t,i)$ y $h(q,p,t,i)$, a menos que uno de ellos sea 0_n, son todos paralelos.[8]

Sin embargo, hemos preferido utilizar la primitiva simple f en vez de las dos primitivas g y h, por dos razones. En primer lugar,

8. Los axiomas octavo y noveno requieren que las fuerzas internas satisfagan la Tercera ley de Newton. El octavo axioma corresponde a lo que Hamel ([2], p. 25) llama el *primer principio de reacción completa*, y el noveno axioma a lo que él llama el *segundo principio de reacción completa* para la mecánica de partículas. La formulación de la mecánica de partículas clásica dada por estos nueve axiomas corresponde estrechamente a la formulación no axiomatizada, intuitiva, dada por Joos ([1], capítulo VI), y por Banach ([1], cap. V). Sin embargo, ni Joos ni Banach permiten a una partícula ejercer más de una fuerza sobre otra; además, ambos juntan todas las fuerzas e introducen una notación sólo para la fuerza externa resultante. Hamel ([2], p. 25) da axiomas que son más restrictivos que éstos. Si hay k partículas en un sistema, permite actuar sobre una partícula sólo las k-1 fuerzas internas debidas a las otras partículas. Por otro lado, Appell ([1], p. 143) y Grammel ([1], p. 340) requieren el octavo axioma pero no el noveno —esto es, no requieren que la fuerza ejercida por una partícula sobre otra esté dirigida a lo largo de la línea que junta las dos partículas.
Estas breves observaciones comparativas indican que no hay un acuerdo preciso por lo que concierne a exactamente cuáles son las asunciones de la mecánica de partículas clásica. Esta diferencia de opinión concerniente a los tipos de asunciones más restrictivos, de los cuales el noveno axioma es un ejemplo, es una justificación parcial para los axiomas más generales P1-6.

incorporar tal distinción en el sistema de axiomas incrementa la dificultad para la demostración de teoremas de un carácter algebraico abstracto (como los teoremas 4, 5, 6, 7 y 8). En segundo lugar, no somos de la opinión de que este cambio en nuestras primitivas serviría a algún propósito útil. Esto se debe principalmente a que la noción de fuerza interna es de tal naturaleza que no todo par de fuerzas balanceadas es considerado como interno; por ejemplo, en una bola en reposo pendiente de una cuerda actúan dos fuerzas balanceadas (la atracción de la tierra y la tensión de la cuerda), pero ambas fuerzas serían llamadas ordinariamente externas. En vez de introducir las nuevas primitivas g y h, creemos que es formalmente más simple y útil hablar de conjuntos de pares de fuerzas balanceadas, en vez de hablar de fuerzas internas. De hecho, muchas de las formulaciones de la dinámica general no dependen en modo alguno de una distinción entre fuerzas internas y externas, o de la noción de una partícula actuando sobre otra.[9]

Hacemos ahora más precisas estas nociones introduciendo algunas definiciones formales.

Definición 1. Sea $\langle P,T,m,s,f\rangle$ un sistema n-dimensional de la mecánica de partículas, sean p y q elementos de P, y sean i y j elementos de Z^+. Entonces decimos que la *i-ésima fuerza actuante sobre p y la j-ésima fuerza actuante sobre q se balancean mutuamente* si las siguientes condiciones se satisfacen para todo t en T:

(1) $f(p,t,i) = -f(q,t,j)$

(2) los vectores $f(p,t,i)$, $f(q,t,j)$ y $s(p,t) - s(q,t)$ a menos que de ellos sea $\vec{0}_n$, son todos paralelos.

Definición 2. Sea $\langle P,T,m,s,f\rangle$ un sistema de la mecánica de partículas y sea $P \times Z^+$ el producto cartesiano de P y Z^+: es decir, el conjunto de todos los pares ordenados $\langle p,i\rangle$ tales que $p \in P$ e $i \in Z^+$. Entonces llamamos a un subconjunto A de $P \times Z^+$ *un conjunto balanceado* si existen dos conjuntos ajenos A_1 y A_2, cuya unión es A, y una correspondencia biunívoca entre A_1 y A_2 tal que, siempre que $\langle p,i\rangle$ en A_1 corresponde a $\langle q,j\rangle$ en A_2, la i-ésima fuerza actuante sobre p y la j-ésima fuerza actuante sobre q se balancean mutuamente.

9. Tales formulaciones generales se encuentran, por ejemplo, en Osgood ([1], Apéndice D) y Marcolongo ([1], vol. 2, cap. III).

Observación. Podría pensarse que en vez de dar las dos definiciones anteriores uno podría definir simple y directamente "conjunto de fuerzas balanceadas". La inadecuación de un procedimiento tal, sin embargo, puede verse a partir del hecho de que distintos miembros de $P \times Z^+$ pueden ser asociados con el mismo vector fuerza. Así supóngase que P consiste precisamente de tres elementos p_1, p_2 y p_3, cada uno con masa de 1, y que, para todo t en T, $s(p_1,t) = \langle t^2,+2,0\rangle$, $s(p_2,t) = \langle -t^2,0\rangle$ y $s(p_3,t) = \langle -t^2,+1,0\rangle$, que $f(p_1,t,1) = \langle 2,0\rangle$, que $f(p_2,t,1) = f(p_3,t,1) = \langle -2,0\rangle$, y que, para $i > 1$, $f(p_1,t,i) = f(p_2,t,i) = f(p_3,t,i) = \langle 0,0\rangle$. Entonces si uno habla del conjunto $\{\langle 2,0\rangle, \langle -2,0\rangle\}$ como un conjunto de fuerzas balanceadas, no es claro si la fuerza $\langle -2,0\rangle$ ha de ser construida como la primera fuerza actuante sobre p_2 o como la primera fuerza actuante sobre p_3.

Para propósitos ulteriores necesitaremos la noción de sistema newtoniano, y es conveniente definir el término en este punto.

Definición 3. Un sistema $\langle P,T,m,s,f\rangle$ es llamado *newtoniano* si el conjunto $P \times Z^+$ es balanceado.

4. TEOREMAS.

Mientras que sería inapropiado ocupar mucho espacio demostrando las muchas proposiciones de la mecánica de partículas usualmente establecidas en los libros de texto, daremos en esta sección algunos teoremas que proporcionan evidencia en favor de que nuestros axiomas son efectivamente adecuados para la mecánica de partículas —así como algunos teoremas que son interesantes desde un punto de vista algebraico. Algunas de las demostraciones más fáciles han sido omitidas.

Nuestro primer teorema, como fue mencionado anteriormente, es una formulación de la Primera Ley de Newton.

Teorema 1. Sea $\Gamma = \langle P,T,m,s,f\rangle$ *un sistema n-dimensional de la mecánica de partículas clásica y sea p un miembro de P tal que, para todo t en T,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i) = 0_n$$

Entonces hay vectores n-dimensionales α *y* β *tales que, para todo t en T,*

$$s(p,t) = \alpha + \beta t.$$

Demostración. Por Axiomas *P3*, *P4* y *P6*.

El siguiente teorema equivale a la afirmación de que la totalidad de la historia de un sistema de la mecánica de partículas está determinado por P, T, m, f y las condiciones iniciales apropiadas. Al axiomatizar cualquier rama de la física determinística es importante poder demostrar un teorema de este tipo, ya que proporciona evidencia parcial en favor de la adecuación de los axiomas; en el caso de nuestro sistema la demostración es tan fácil que la hemos omitido.

Teorema 2. Sean P y T conjuntos, y m y f funciones, que satisfacen los axiomas P1, P2, P4 y P5 y supóngase, además, que para todo p en P hay una función con valores vectoriales g_p tal que

$$\frac{d}{dt}\,[\,g_p\,(t)\,] = \sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i).$$

Sea $P = \{p_1,\ldots,p_r\}$ *; sea* t_0 *un elemento fijo de T, y sean* $a_1,\ldots, a_r$ *y* $\beta_1,\ldots,\beta_r$ *vectores fijos. Entonces existe una y sólo una función s tal que* $\langle P,T,m,s,f\rangle$ *es un sistema de la mecánica de partículas y tal que para* $i = 1,\ldots,r$,

$$s(p_i,\, t_0) = a_i \text{ y } \frac{d}{dt}\, s(p_i,t)\,\Big|_{t=t_0} = \beta_i.$$

En conexión con cierta clase de teoremas surge un problema de cierto interés filosófico. Tenemos en mente aquellos teoremas que son ordinariamente establecidos en el modo subjuntivo como condicionales contrafácticos. La literatura filosófica reciente[10] indica cuán insatisfactorio es el análisis que tenemos todavía de tales afirmaciones, y en consecuencia parece deseable eliminar todo uso de ellas en una axiomatización de la mecánica formulada con precisión. Mostramos cómo se puede llevar a cabo esto para uno de los más familiares de estos teoremas: es decir, la aseveración de que el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como *si* toda la masa *estuviera concentrada* ahí y la resultante de todas las fuerzas "externas" *actuara* ahí. Sin utilizar el modo subjuntivo este teorema puede ser formulado como sigue.

Teorema 3. Sea $\langle P,T,m,s,f\rangle$ *un sistema de la mecánica de partículas, sea A cualquier subconjunto balanceado de* $P \times Z^+$, *sea b cualquier objeto, y sea*

10 Ver Goodman [1], y pp. 14-15 de Quine [1].

(*i*) $P' = \{ b \}$

(*ii*) $m'(b) = \sum_{p \in P} m(p)$

(*iii*) $s'(b,t) = \frac{1}{\sum_{p \in P} m(p)} [\sum_{p \in P} m(p) s(p,t)]$

(*iv*) $f'(b,t,1) = \sum_{\langle p,i \rangle \in A} f(p,t,i)$

(*v*) $f'(b,t,i) = \bar{0}_n$ para $i > 1$.

Entonces $\langle P',T',m',s',f' \rangle$ *es un sistema de la mecánica de partículas.*

Observamos que el teorema anterior depende del hecho de que P es un conjunto finito; si P no fuera finito, (*iii*) y (*iv*) no serían suficientes para definir s' y f'.

Vamos ahora a algunos teoremas, sobre sistemas de la mecánica de partículas, que son análogos a ciertos teoremas familiares del álgebra moderna. En particular, examinamos algunos de los modos en que es posible construir nuevos sistemas de la mecánica de partículas a partir de sistemas dados.

Definición 4. Si $\langle x_1,...,x_r \rangle$ y $\langle y_1,...,y_s \rangle$ son vectores (no necesariamente con el mismo número de componentes), escribimos $\langle x_1,...,x_r \rangle \oplus \langle y_1,...,y_s \rangle = \langle x_1,...,x_r, y_1,...,y_s \rangle$. Si f es una función definida sobre algún dominio D, que toma como valores vectores r-dimensionales, y si g es una función definida sobre el mismo dominio D, que toma como valores vectores s-dimensionales, entonces por $f \oplus g$ significamos la función h tal que, para todo x en D, $h(x) = f(x) \oplus g(x)$. (De modo que si $f(1) = \langle 1,2 \rangle$ y $g(1) = \langle 2,3,4 \rangle$ entonces, $f \oplus g(1) = \langle 1,2,2,3,4 \rangle$). Si $\Gamma = \langle P,T,m,s,f \rangle$ y $\Gamma' = \langle P,T,m,s',f' \rangle$ son sistemas de la mecánica de partículas, entonces por $\Gamma \oplus \Gamma'$ significamos el sistema $\langle P,T,m,s \oplus s',f \oplus f', \rangle$; llamamos a $\Gamma \oplus \Gamma'$ la *concatenación* de Γ y Γ'.

Teorema 4. Si $\Gamma = \langle P,T,m,s,f \rangle$ *es un sistema r-dimensional de la mecánica de partículas, y* $\Gamma' = \langle P,T,m,s',f' \rangle$ *es un sistema s-dimensional de la mecánica de partículas, entonces* $\Gamma \oplus \Gamma'$ *es un sistema* $(r + s)$ *-dimensional de la mecánica de partículas.*

Teorema 5. Si Γ *es cualquier sistema n-dimensional de la mecánica de partículas, entonces existen n sistemas unidimensionales de la mecánica de partículas unívocamente determinados* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *tales que* $\Gamma = \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \ldots \oplus \Delta_n$. *Si r y s son enteros positivos cuya suma es n, entonces existe exactamente un sistema r-dimensional de la mecánica de partículas,* Γ_r, *y exactamente un sistema s-dimensional de la mecánica de partículas,* Γ_s, *tal que* $\Gamma = \Gamma_r \oplus \Gamma_s$.

Hacemos notar que la operación de concatenación tiene ciertas propiedades en común con la operación de formación de la unión directa de dos álgebras. Es debido a esta analogía que a veces es suficiente, para demostrar un teorema acerca de la mecánica tridimensional, demostrarlo acerca de la mecánica unidimensional; este procedimiento ha sido utilizado frecuentemente en los desarrollos intuitivos de la mecánica.

Es digno de mencionarse que los Teoremas 4 y 5 no necesariamente permanecerían verdaderos si reforzáramos nuestros axiomas en varias formas. Para aclarar este punto, definimos ahora una clase especial de sistemas de la mecánica de partículas; ejemplos de sistemas que satisfacen las condiciones de esta definición se encuentran en los dominios de la mecánica celeste y la electrostática.

Definición 5. Sea $\Gamma = \langle P, T, m, s, f \rangle$ un sistema *n*-dimensional de la mecánica de partículas, donde $P = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Entonces llamamos a Γ un sistema *ultraclásico* si existen r^2 funciones $\theta i,j$ (para $i, j = 1, \ldots, r$), cada una de las cuales es una función de una variable real con valores reales, y tales que, para todo t en T.

(*i*) $\theta i, j = \theta j, i$;

(*ii*) $f(p_i, t, j) = \theta i, j(|\, s(p_i, t) - s(p_j, t)\,|)\,[s(p_i, t) - s(p_j, t)]$, para $i, j = 1, \ldots, r$;

(*iii*) $f(p_i, t, j) = \bar{0}_n$ para $i = 1, \ldots, r$, y $j > r$.

Es inmediatamente claro a partir de esta definición que todo sistema ultraclásico es newtoniano.

Es fácil construir dos sistemas ultraclásicos cuya concatenación no es ultraclásica; más aún, no todo sistema ultraclásico bidimensional puede ser representado como una concatenación de sistemas ultraclásicos unidimensionales.

Sin embargo, es interesante mencionar que el Teorema 5 per-

manece verdadero si sustituimos "sistema" por "sistema newtoniano". Pero la concatenación de dos sistemas newtonianos no es necesariamente newtoniana.

Nos ocupamos ahora de una noción que es análoga a la noción de subálgebra de un álgebra.

Definición 6. Sea $\Gamma = \langle P,T,m,s,f\rangle$ un sistema de la mecánica de partículas; sea P' un subconjunto no vacío de P; y sean m', s', f' las funciones m, s y f con sus primeros argumentos restringidos a P': así m', por ejemplo, está definida sólo sobre P' y, para todo p en P', $m'(p) = m(p)$. Entonces llamamos a $\Gamma' = \langle P',T',m',s',f'\rangle$ un subsistema de Γ.

Teorema 6. Todo subsistema de un sistema de la mecánica de partículas es nuevamente un sistema de la mecánica de partículas.

Observación. Hacemos notar, por otro lado, que un subsistema de un sistema newtoniano no es necesariamente newtoniano; ni un subsistema de un sistema ultraclásico es necesariamente ultraclásico.

Definición 7. Dos sistemas $\langle P,T,m,s,f\rangle$ y $\langle P',T',m',s',f'\rangle$ de la mecánica de partículas son llamados *ajenos* si P y P' son mutuamente excluyentes.

Definición 8. Sean $\Gamma = \langle P,T,m,s,f\rangle$ y $\Gamma' = \langle P',T',m',s',f'\rangle$ sistemas ajenos de la mecánica de partículas tales que $T' = T$. Entonces por la *suma* de Γ y Γ', que denotamos por $\Gamma+\Gamma'$, significamos el sistema $\Gamma'' = \langle P'',T'',m'',s'',f''\rangle$ donde

(*i*) $T'' = T$,

(*ii*) P'' es la suma conjuntística de P y P';

(*iii*) si p está en P, entonces, para todo t en T y para todo entero positivo i,

$$m''(p) = m(p)$$

$$s''(p,t) = s(p,t)$$

$$f''(p,t,i) = f(p,t,i);$$

(*iv*) si p está en P' entonces, para todo t en T y todo entero positivo i,

$$m''(p) = m'(p)$$

$$s''(p,t) = s'(p,t)$$

$$f''(p,t,i) = f'(p,t,i).$$

Teorema 7. Si $\Gamma = \langle P,T,m,s,f\rangle$ *y* $\Gamma' = \langle P',T',m',s',f'\rangle$ *son sistemas n-dimensionales ajenos de la mecánica de partículas tales que* $T' = T$, *entonces* $\Gamma + \Gamma'$ *es también un sistema de la mecánica de partículas. Más aún,* Γ *y* Γ' *son subsistemas de* $\Gamma + \Gamma'$.

El siguiente teorema,[11] como fue mencionado antes, constituye nuestra justificación para no incluir la Tercera ley de Newton como axioma.

Teorema 8. Todo sistema de la mecánica de partículas es un subsistema de un sistema newtoniano.

Demostración. Llevaremos a cabo la demostración sólo para el caso especial de un sistema bidimensional que contiene precisamente una partícula; debe ser obvio qué cambios serían necesarios para dar cuenta del caso general.

Comenzamos explicando con unas cuantas palabras la idea intuitiva que subyace a esta demostración. Supóngase, por simplicidad, que tenemos una partícula p_1 en el primer cuadrante con fuerzas arbitrarias actuando sobre ella. Colocamos una partícula "encima" de p_1 y tres partículas en los otros tres cuadrantes ubicadas simétricamente con respecto a los ejes de las x y de las y. Entonces es posible introducir fuerzas sobre las cuatro nuevas partículas de manera que el sistema resultante sea newtoniano.

Vamos ahora a la demostración formal.

Es conveniente introducir dos funciones cada una de las cuales destaca una componente de un vector bidimensional. Si $\langle x_1,x_2\rangle$ es cualquier vector bidimensional, escribimos

$$\phi_1(\langle x_1,x_2\rangle) = x_1 \quad \text{y} \quad \phi_2(\langle x_1,x_2\rangle) = x_2.$$

11. Estamos en deuda con el profesor Herman Rubin por una mejora en la formulación de este teorema.
Históricamente, el teorema es una reminiscencia del empleo por Hertz de partículas "ocultas" para sumergir todo sistema de partículas en un sistema "libre" que obedezca su fundamental Principio del Camino más Directo, Ver Hertz [1], cap. V.

Sea $\Gamma_1 = <\{p_1\}, T, M_1, s_1, f_1>$ un sistema bidimensional de la mecánica de partículas. Sea $\Gamma_2 = <\{p_2\}, T, m_2, s_2, f_2>$ y relacionado con Γ_1 como sigue:

$p_2 \neq p_1$

$m_2(p_2) = m_1(p_1)$;

$s_2(p_2,t) = s_1(p_1,t)$, para todo t en T,

$f_2(p_2,t,1) = <2\phi_1[\sum_{i=1}^{\infty} f_1(p_1,t,i)], 0>$

$f_2(p_2,t,2) = <0, 2\phi_2[\sum_{i=1}^{\infty} f_1(p_1,t,i)]>$

$f_2(p_2,t,i+2) = -f_1(p_1,t,i)$ para $i = 1,2,\ldots$

Sea $\Gamma_3 = <\{p_3\}, T, m_3, s_3, f_3>$ un sistema bidimensional relacionado con Γ_1 y Γ_2 como sigue:

$p_3 \notin \{p_1, p_2\}$;

$m_3(p_3) = 2m_1(p_1)$

$s_3(p_3,t) = <-\phi_1[s_1(p_1,t)], \phi_2[s_1(p_1,t)]>$

$f_3(p_3,t,1) = <-2\phi_1[\sum_{i=1}^{\infty} f_1(p_1,t,i)], 0>$

$f_3(p_3,t,2) = <0, 2\phi_2[\sum_{i=1}^{\infty} f_1(p_1,t,i)]>$

$f_3(p_3,t,i) = <0,0>$ para $i > 2$.

Sea ahora $\Gamma_4 = <\{p_4\}, T, m_4, s_4, f_4>$ un sistema bidimensional tal que

$p_4 \notin \{p_1, p_2, p_3\}$

$m_4(p_4) = 2m_1(p_1)$

$s_4(p_4,t) = <-\phi_1[s_1(p_1,t)], -\phi_2[s_1(p_1,t)]>$

$f_4(p_4,t,1) = <-2\phi_1[\sum_{i=1}^{\infty} f_1(p_1,t,i)], 0>$

$$f_4(p_4,t,2) = \langle 0, -2\phi_2 [\sum_{i=1}^{\infty} f_1(p_1,t,i)] \rangle$$

$$f_4(p_4,t,i) = \langle 0,0 \rangle \text{ para } i > 2.$$

Finalmente, sea $\Gamma_5 = \langle \{p_5\}, T, m_5, s_5, f_5 \rangle$ un sistema bidimensional tal que

$$p_5 \notin \{p_1,p_2,p_3,p_4\}$$

$$m_5(p_5) = 2m_1(p_1)$$

$$s_5(p_5,t) = \langle \phi_1[s_1(p_1,t)], -\phi_2[s_1(p_1,t)] \rangle$$

$$f_5(p_5,t,1) = \langle 2\phi_1[\sum_{i=1}^{\infty} f_1(p_1,t,i)], 0 \rangle$$

$$f_5(p_5,t,2) = \langle 0, -2\phi_2[\sum_{i=1}^{\infty} f_1(p_1,t,i)] \rangle$$

$$f_5(p_5,t,i) = \langle 0,0 \rangle \text{ para } i > 2.$$

Claramente, $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ y Γ_5 son todos sistemas bidimensionales de la mecánica de partículas. Por el Teorema 7, el sistema $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5$ es también un sistema de la mecánica de partículas, y Γ_1 es un subsistema de Γ. Más aún, se ve fácilmente a partir de la construcción que Γ es newtoniano.

Concluimos a partir de la demostración del teorema anterior que un sistena n-dimensional de la mecánica de partículas que contenga k partículas puede ser sumergido en un sistema newtoniano con $k(1 + 2^n)$ partículas. Este límite puede ser mejorado en algunos casos: así, es fácil mostrar que un sistema unidimensional que contenga k partículas puede ser sumergido en un sistema newtoniano con $k + 1$ partículas.

Es interesante notar que el Teorema 8 no podría ser demostrado si adoptáramos el Axioma de impenetrabilidad expuesto en la Sección 3. Esto se ve al considerar cualquier sistema que contenga precisamente una partícula sometida a una infinidad de fuerzas no desvanecentes, ningún par de las cuales es colineal. Para sumergir un sistema tal en un sistema newtoniano que satisfaga el Axioma de impenetrabilidad tendríamos que agregar, para cada fuerza, una partícula situada a lo largo de su línea de acción, lo que violaría el Axioma P1.

Sin embargo, aun asumiendo el Axioma de impenetrabilidad es posible demostrar un teorema de inmersión si generalizamos la noción de sistema newtoniano eliminando el requisito de que un par de fuerzas balanceadas se situé a lo largo de la línea que conecta las dos partículas;[12] si $\Gamma = \langle P,T,m,s,f\rangle$ es un sistema de la mecánica de partículas donde T es un intervalo finito cerrado, entonces Γ puede ser sumergido en un sistema newtoniano generalizado Γ'; más aún, si Γ satisface el Axioma de impenetrabilidad, entonces se puede elegir Γ' de modo que satisfaga también este Axioma.

5. INDEPENDENCIA DE LAS NOCIONES PRIMITIVAS.

Vamos ahora a la cuestión de la independencia de nuestras nociones primitivas. Como fue mencionado en la Sección 1, los conjuntos P y T son definibles en términos de las funciones m, s y f; habremos de mostrar, por otro lado, que m, s y f no son definibles en términos de las otras primitivas. Esto se lleva a cabo mediante el método de Padoa[13]. Todos los sistemas[14] utilizados son ultraclásicos y por ende, *a fortiori*, son sistemas newtonianos de la mecánica de partículas —lo que muestra que m, f y s permanecerían mutuamente independientes aun si agregáramos la Tercera ley de Newton a nuestro conjunto de axiomas.

La independencia de m. Sea P el conjunto cuyo único miembro es 1, y sea T el conjunto de todos los números reales. Sea

$$m_1(1) = 1$$

y

$$m_2(1) = 2$$

Para cualquier t en T, sea

$$s(1,t) = \langle 1, 1, 1\rangle$$

12 Comparar con la discusión en la nota 8.

13 Para una explicación de este método, ver McKinsey [1], Padoa [1], o Tarski [1].

14 Nótese que cada uno de los seis sistemas que siguen proporciona una demostración de la consistencia de la mecánica de partículas —o, propiamente hablando, una demostración de que la mecánica de partículas es consistente si el análisis es consistente. Aquí utilizamos la noción de consistencia en su sentido lógico usual (de que los axiomas no implican una contradicción), no en el sentido de Hamel (ver Hamel [2], pp.40-42), quien piensa como un problema de consistencia el problema de mostrar, para un conjunto dado de ecuaciones que involucran fuerzas, que existe un sistema de la mecánica que satisface las ecuaciones (de modo que él utiliza la noción como es utilizada, por ejemplo, en el álgebra, cuando uno llama a un conjunto de ecuaciones simultáneas "consistente" si poseen una solución).

Para cualquier t en T y para cualquier entero positivo i, sea

$$f(1,t,i) = \langle 0, 0, 0\rangle.$$

Entonces se verifica fácilmente que $\langle P,T,m_1,s,f\rangle$ y $\langle P,T,m_2,s,f\rangle$ son, ambos, sistemas de la mecánica de partículas (y, claramente, sistemas ultraclásicos de la mecánica de partículas). Esto muestra, sin embargo, que m no es definible en términos de P, T, s y f; pues si m fuera definible sólo habría una m que satisfaría nuestros axiomas, para P, T, s y f dados.

Independencia de s. Sea $P = \{1,2\}$, y sea $T = [2,3]$. Sea

$$m(1) = m(2) = 1.$$

Para todo t en T, sea

$$s_1(1,t) = \langle t^2 - t, t, 4\rangle$$

$$s_1(2,t) = \langle -t^2 + t, t, 4\rangle.$$

y sea

$$s_2(1,t) = \langle t^2, 0, 0\rangle$$

$$s_2(2,t) = \langle -t^2, 0, 0\rangle.$$

Para todo t en T, sea

$$f(1, t, 2) = \langle 2, 0, 0\rangle$$

$$f(2, t, 1) = \langle -2, 0, 0\rangle.$$

y para $i \neq 2$ y $j \neq 1$, sea

$$f(1, t, i) = f(2, t, j) = \langle 0, 0, 0\rangle.$$

Entonces $\langle P,T,m,s_1,f\rangle$ y $\langle P,T,m,s_2,f\rangle$ son sistemas ultraclásicos de la mecánica de partículas.

Independencia de f. Sea $P = \{1,2,3\}$, y sea $T = [1,2]$. Sea

$$m(1) = m(2) = m(3) = 1.$$

Para todo t en T, sea

$$s(1, t) = \langle t^2, 0, 0\rangle$$

$$s(2, t) = \langle -t^2, 0, 0 \rangle$$

$$s(3, t) = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

Pata todo t en T, sea

$$f_1(1, t, 2) = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

$$f_1(1, t, i) = \langle 0, 0, 0 \rangle \qquad \text{para } i \neq 2$$

$$f_1(2, t, 1) = \langle -2, 0, 0 \rangle$$

$$f_1(2, t, i) = \langle 0, 0, 0 \rangle \qquad \text{para } i \neq 1$$

$$f_1(3, t, i) = \langle 0, 0, 0 \rangle \qquad \text{para todo } i.$$

Para todo t en T, sea

$$f_2(1, t, 2) = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$f_2(1, t, 3) = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$f_2(1, t, i) = \langle 0, 0, 0 \rangle \qquad \text{para } i \notin \{2, 3\}$$

$$f_2(2, t, 1) = \langle -1, 0, 0 \rangle$$

$$f_2(2, t, 3) = \langle -1, 0, 0 \rangle$$

$$f_2(2, t, i) = \langle 0, 0, 0 \rangle \qquad \text{para } i \notin \{1, 3\}$$

$$f_2(3, t, 1) = \langle -1, 0, 0 \rangle$$

$$f_2(3, t, 2) = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$f_2(3, t, i) = \langle 0, 0, 0 \rangle \qquad \text{para } i \notin \{1, 2\}.$$

Entonces $\langle P,T,m,f_1,s \rangle$ y $\langle P,T,m,f_2,s \rangle$ son sistemas (ultraclásicos) de la mecánica de partículas.

Observaciones. Todos los sistemas descritos arriba para demostrar independencia tienen un carácter altamente trivial. No obstante algunos de los resultados establecidos (es decir, que m y f no son definibles) pueden parecer un poco sorprendentes, en vista del hecho de que ha sido sostenido más bien generalmente que la masa y

la fuerza son definibles. Trataremos de disipar mal entendidos con siderando algunas de las definiciones que han sido propuestas.

Kirchhoff (en Kirchhoff [1]) propone que definamos a la fuerza actuante sobre un cuerpo simplemente como el producto de la masa del cuerpo por su aceleración; [15] esto no únicamente eliminaría a la noción primitiva f, sino que haría innecesario postular la Segunda ley de Newton. Este procedimiento, sin embargo, sólo permitiría definir la fuerza resultante actuante sobre una partícula —no las fuerzas originalmente dadas. Así, utilizando la notación de este artículo, si escribimos (para toda p en P y t en T) $R(p,t) = \Sigma_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)$, entonces la sugerencia de Kirchhoff proporcionaría una definición para la función R, pero no para la función f. No hay, por ende, contradicción entre la sugerencia de Kirchhoff y nuestra demostración de la independencia de f.

Mach [16] propone definir las masas relativas de dos partículas como la razón inversa de sus aceleraciones "mutuamente inducidas" cuando están aisladas de otras partículas. En nuestros términos esto significa lo siguiente: supóngase que $\langle P,T,m,s,f\rangle$ es un sistema newtoniano de la mecánica de partículas, donde P contiene dos elementos, digamos p_1 y p_2; entonces

$$m(p_1)\,\frac{d^2}{dt^2}\,s(p_1,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f(p_1,t,i)$$

y

$$m(p_2)\,\frac{d^2}{dt^2}\,s(p_2,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f(p_2,t,i);$$

sin embargo, dado que el sistema es newtoniano,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(p_1,t,i) = -\sum_{i=1}^{\infty} f(p_2,t,i),$$

y por lo tanto

$$m(p_1)\,\frac{d^2}{dt^2}\,s(p_1,t) = m(p_2)\,\frac{d^2}{dt^2}\,s(p_2,t);$$

15. Hamel (en Hamel [3], p. 7) objeta esta propuesta de definición sobre la base de que: "Wäre sie richtig, dann wäre die Mechanik keine Naturwissenschaft mehr, sondern eine Tautologie". ["¡si esto fuese correcto, entonces la mecánica no sería más una ciencia de la naturaleza sino una tautología! ". N. del T.]. Sin embargo, está claro que se necesitarían otros axiomas aún si la definición de Kirchhoff fuese adoptada.
16. Ver Mach [1], pp. 264-277. Para una formulación más reciente de los puntos de vista de Mach sobre este tópico, ver Lindsay y Margenau [1], pp. 92-93.

por consiguiente, si $d^2/dt^2\ s(p_1,t)$ y $d^2/dt^2\ s(p_2,t)$ son distintas de cero, la cantidad $(m(p_1)/m(p_2))$ es igual al cociente de los valores absolutos de $d^2/dt^2\ s(p_2,t)$ y $d^2/dt^2\ s(p_1,t)$.

Con respecto a esta definición propuesta, observamos de una vez que, en su forma presente, se aplica sólo a los sistemas newtonianos que contienen precisamente dos partículas –y, claramente, aún a tales sistemas sólo bajo la hipótesis de que las fuerzas resultantes no son idénticas a cero. Más aún, Pendse ([1],[2],[3]) ha mostrado que no es posible extender la "definición" de Mach a sistemas newtonianos que contengan un número arbitrario de partículas; en particular, Pendse muestra que, para más de siete partículas, no es en general suficiente un conocimiento de las aceleraciones "mutuamente inducidas" de las partículas para una determinación unívoca de los cocientes de sus masas.[17]

La idea de Mach era probablemente que, al tratar con una partícula dada en un sistema Γ dado, el experimentador podría determinar su masa colocándola en un sistema newtoniano del tipo descrito y luego regresándola a Γ, con la suposición de que la masa resultaría invariante. En nuestros términos, sin embargo, no hay modo de efectuar estas maniobras con una partícula de un sistema a otro; la sugerencia de Mach permitiría una definición formal de masa sólo en el caso de que fuera uno a tratar con un sistema muy extendido que contendría, entre otras cosas, la noción de un experimentador; no es claro en modo alguno, sin embargo, que sería posible axiomatizar un sistema extendido tal de modo satisfactorio.

Nos gustaría señalar, al cerrar esta discusión, que para asegurarnos de que una noción es independiente de otras no siempre es necesario saber con exactitud qué axiomas han de ser impuestos sobre las nociones: es suficiente que uno pueda tener la certeza de que cada uno de dos modelos es una interpretación de cualesquiera axiomas que uno quisiera imponer. Así, si alguien sostuviera, por ejemplo, que en la mecánica de partículas la masa es definible en términos de la posición y la fuerza, entonces debería sostener que alguno de los dos sistemas $\langle P,T,m_1,s,f\rangle$ y $\langle P,T,m_2,s,f\rangle$ de nuestra demostración de independencia no es efectivamente un sistema de la mecánica de partículas; en una palabra, tendría que asumir un axioma que eliminara la posibilidad de un sistema consistente de una sola partícula, ubicada quietamente en reposo por sí misma, sin fuerzas que actúen sobre ella.

17. En conexión con esto ver Simon [1].

REFERENCIAS

[1] Appell, P. *Traité de Mécanique Rationnelle,* Tomo I, 6a. ed., París: 1941.
[1] Banach, S. *Mechanics,* traducido por E.J. Scott, Warsaw, 1951.
[1] Goodman, Nelson. "The Problem of Counterfactual Conditionals", *Jour nal of Philosophy,* 44 (1947), pp. 113-128.
[1] Grammel, R. "Kinetik der Massenpunkte", *Handbuch der Physik,* 5, pp. 305-372.
[1] Hermes, Hans. Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, serie nueva, 3, s. Hirzel, Leipzig 1938, pp. 44.
[1] Hamel, G. "Uber die Grundlagen der Mechanik", *Mathematische Annalen,* 66 (1908), pp. 350-397.
[2] Hamel, G. "Die Axiome der Mechanik", *Handbuch der Physik,* 5, pp. 1-42.
[3] Hamel, G. *Theoretische Mechanik,* Berlin 1949.
[1] Hertz, H. *The Principles of Mechanics,* traducido por D.E. Jones y J.T. Walley, London, 1899.
[1] Joos, G. *Theoretical Physics,* traducido por I.M. Freeman, New York, 1934.
[1] Kirchhoff, G. *Vorlesungen über mathematische Physik,* 1 Mechanik, 1878.
[1] Lindsay, R.B. y Margenau, H. *Foundations of Physics,* New York, 1936.
[1] Mach, E. *Science of Mechanics,* traducido del Alemán por T.J. McCormack, 5a, edición americana, LaSalle, Ill, 1942.
[1] Marcolongo, R. *Theoretische Mechanik,* 2 vols. Deutsch von H.E. Timerding, Leipzig, 1911 y 1912.
[1] McKinsey, J.C.C. "On the independence of undefined ideas", Boletín de la *American Mathematical Society,* 1935, pp. 291-297.
[1] Osgood, W.F. *Mechanics,* New York, 1937.
[1] Padoa, Alessandro. "Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque", *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie,* 3 (1900).
[1] Pendse, C.G. "A note on the definition and determination of mass in Newtonian mechanics". *Philosophical Magazine* (7), xxiv (1937), pp. 1012-1022.
[2] Pendse, C.G. "A further note on the definition and determination of mass in Newtonian mechanics", *Ibid.*, xxvii (1939), pp. 51-61.
[3] Pendse, C.G. "On mass and force in Newtonian mechanics", *Ibid.*, xxix (1940), pp. 477-484.
[1] Quine, W.V. *Methods of Logic.* Henry Holt and Company, New York, 1950.
[1] Rosser, Barkley. Reseña de Hermes [1], *Journal of Symbolic Logic,* 3 (1938), pp. 119-120.
[1] Simon, H.A. "Axioms of Newtonian mechanics", *Philosophi cal Magazine* (7), xxxvi (1947), pp. 888-905.
[1] Tarski, A. "Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe", *Erkenntnis,* 5 (1935-36), pp. 80-100.

LECTURAS FILOSOFICAS

Próximos números:

Hugo Enrique Sáez

Filosofía y Ciencia en el modo de producción capitalista

Jorge Juanes

Fuerzas productivas y práctica política: ¿Marx o Ricardo?

Mario Bunge

El concepto de estructura social

Roberto Briceño

Una aproximación a la Estética

ESCUELA DE FILOSOFIA
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

CUADERNOS DE

crítica

1. **H. P. Grice**

   SIGNIFICADO

2. **Thomas Nagel**

   FISICALISMO

3. **H. L. A. Hart**

   OBLIGACIÓN JURÍDICA Y OBLIGACIÓN MORAL

4. **H. L. A. Hart**

   UNA VISITA A KELSEN

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
TORRE UNO DE HUMANIDADES, 4o. PISO
CIUDAD UNIVERSITARIA
MÉXICO 20, D. F. MÉXICO

crítica

REVISTA HISPANOAMERICANA DE FILOSOFIA

Vol. IX / No. 26 / México, agosto 1977

ALICE AMBROSE
The Yellow Book Notes in Relation to *the Blue Book*

C. ULISES MOULINES
Por qué no soy materialista

ALOYSIUS P. MARTINICH
Austin, Strawson and the Correspondence Theory of Language

MAURICIO BEUCHOT
El problema de los universales en Gottlob Frege

JOSE A. ROBLES
Cualidades (simples) y semejanza

Discusiones

ENRIQUE VILLANUEVA
La mente: ¿hechos sólidos o necesidades ilusorias?

Notas bibliográficas
Noticias
Libros recibidos

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSOFICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

dialéctica

AÑO II **No. 3** **Julio 1977**

OSCAR DEL BARCO

Althusser en *su* encrucijada

CARLOS PEREYRA

Los conceptos de *inversión y sobredeterminación* en Althusser

GABRIEL VARGAS LOZANO

La relación Marx-Hegel, Althusser y el concepto de *inversión*

JUAN MORA RUBIO

Louis Althusser: ¿Ruptura epistemológica o ruptura política?

RICHARD SCHACHT

Comentario al prólogo de la *Fenomenología del Espíritu* de Hegel

Documentos

LOUIS ALTHUSSER

Tesis de Amiens

Noticias Bibliográficas

Notas

ESCUELA DE FILOSOFIA Y LETRAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA